

## UMA PLATAFORMA INTELIGENTE EM AMBIENTE DE WEB SEMÂNTICA DESTINADA AO ENSINO À DISTÂNCIA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

**M. W. Moreira (PQ)<sup>1</sup> ; A. M. Oliveira (PQ)<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Instituto Federal do Ceará (IFCE) - Campus Aracati - e-mail: [mario.wedney@ifce.edu.br](mailto:mario.wedney@ifce.edu.br), <sup>2</sup>Instituto Federal do Ceará (IFCE) - Campus Aracati - e-mail: [mauro.oliveira@fortalnet.com.br](mailto:mauro.oliveira@fortalnet.com.br)

### RESUMO

Dentre fatores que dificultam o ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), merecem destaque a natureza epistemológica reconhecidamente complexa do tema e os processos mentais requeridos para sua compreensão. Este cenário pedagógico torna-se, naturalmente, mais complexo na chamada Educação a Distância (EaD) por envolver variáveis típicas de Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA). Neste contexto, a tecnologia web pode exercer papel epistemológico importante dado sua universalidade na Internet. Este trabalho propõe a especificação e o desenvolvimento de uma plataforma

inteligente destinada ao ensino de CDI em ambiente de web semântica. A proposta faz uso da tecnologia web semântica tanto por ser uma tendência no estado da arte em ambientes virtuais, mas pelo uso que a web semântica faz de ontologias cujo modelo de dados representa objetos de um domínio e seus relacionamentos, permitindo inferência sobre estes objetos. A expectativa é que a representação do conhecimento por ontologias agregue valor diferenciado às metodologias na concepção de uma plataforma mais adaptada à EaD/AVA para CDI.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino de Matemática, web semântica, educação à distância.

### AN INTELLIGENT PLATFORM IN ENVIRONMENT OF WEB SEMANTICS INTENDED FOR DISTANCE LEARNING OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS

### ABSTRACT

Among the factors that hinder the teaching/learning of the Differential and Integral Calculus (DIC), worth admiring, is the admittedly complex epistemological nature of the subject and the mental processes required for the understanding. This pedagogical scenario becomes naturally more complex on Distance Education (DE) situations by engaging typical variables of Virtual Learning Environments (VLE). In this context, web technology can play an important epistemological role given its universality on the Internet. This paper proposes the specification and

development of an intelligent platform for the teaching of CDI in semantic web environment. The purpose makes use of semantic web technology both to be a trend in the state of the art of virtual environments, but by using the semantic web is ontology whose data model is a domain of objects and their relationships, allowing inferences about these objects. The expectation is that the knowledge representation for ontologies adds, differentiated value methodologies in designing a more suitable platform for DE/AVA to CDI.

**KEY WORDS:** Teaching of Mathematics, semantic web and distance education.

---

## UMA PLATAFORMA INTELIGENTE EM AMBIENTE DE WEB SEMÂNTICA DESTINADA AO ENSINO À DISTÂNCIA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### INTRODUÇÃO

A Matemática é indispensável em diversas áreas do conhecimento humano, necessária à formação do indivíduo, pois além de estar presente no seu cotidiano, expressa uma linguagem do pensamento humano. O educador deve buscar alternativas para tornar o seu ensino significativo, buscando também abordá-lo a partir do desenvolvimento da realidade à qual o estudante está inserido.

O ensino de Matemática se mostra hoje limitado, tornando-se um exercício repetitivo e sem sentido para a solução de problemas, o que desenvolve o raciocínio abstrato e a capacidade formal, mas não conduz a uma concepção mais profunda dos seus conceitos pelos estudantes.

A justificativa do ensino de Matemática apresentada aos estudantes, muitas vezes se resume à importância para a sua aplicação em exercícios ou para o desenvolvimento do raciocínio que abrangem apenas formas quantitativas da realidade (ÁVILA, 2007).

Para Ávila a intuição é a faculdade que permite obter o conhecimento de uma forma direta. De modo frequente, muitos se referem a algum fato “intuitivo”, querendo dizer que se aborda algo cuja verdade é facilmente perceptível. Mas é bom lembrar que “intuitivo” não é sinônimo de “fácil”. Há muitas verdades difíceis de serem alcançadas que são percebidas pela intuição (ÁVILA, 2007).

Com a evolução da Matemática e a sua subdivisão em vários ramos, a linguagem, as notações e as definições formais adquiriram papel essencial. A evolução e, consequentemente, a complexidade das simbologias que representam os objetos matemáticos são consequências da generalização das formas de abstração, cognição e memória necessárias para a apreensão destas entidades conceituais abstratas peculiares da Matemática.

A mediação repassada pelo método formalista não assume como prioritário o ato de promover de modo frutífero a produção e a diversificação de representações mentais do estudante. Por outro lado, a intuição assume um papel essencial, tanto na investigação como no processo de ensino da Matemática e, consequentemente, no ensino/aprendizagem do CDI.

As práticas desenvolvidas no *locus* acadêmico tomam sentido completamente contrário do percurso histórico com vistas a esvaziar o papel da intuição. Com efeito, Artigue (2002, p. 118) nos informa que “os primeiros resultados provenientes da investigação realizada nos níveis universitários podem ser considerados negativos”.

Mais adiante, a autora aponta que os resultados obtidos “proporcionam evidências estatísticas das limitações tanto das práticas educativas tradicionais como das práticas que favorecem um enfoque formal e teórico, que refletem o estilo Bourbaki” (ARTIGUE, 2002, p. 119). Sabemos, entretanto, que o grupo Bourbaki criticou diversos pressupostos defendidos pelos matemáticos que sustentavam a validade dos conhecimentos obtidos por meio da intuição.

Destacamos dois aspectos relacionados a este conceito, aptos a funcionar como fatores que dificultam o seu ensino/aprendizagem. O primeiro refere-se à sua “natureza epistemológica reconhecidamente complexa.” (ARTIGUE, 2003). O segundo, diz respeito aos “processos mentais requeridos na compreensão desta ideia.” (ARTIGUE, 2003; TALL, 2002).

## O USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Diversas metodologias têm sido extensamente utilizadas para o ensino de CDI. A mediação didática que envolve a exploração destas metodologias pode proporcionar a evolução do conhecimento do estudante de Cálculo. No entanto, mesmo utilizando estas mediações, não se percebe modificações significativas e parte das dificuldades dos alunos no processo cognitivo do CDI permanecem. Este cenário pedagógico torna-se, naturalmente, mais complexo na chamada Educação a Distância (EaD) por envolver variáveis típicas de Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA).

Como optamos por utilizar um aparato computacional como apoio ao processo de ensino/aprendizagem do CDI, necessitaremos de alguns cuidados no que diz respeito às potencialidades e limitações do instrumento tecnológico.

É inegável que o ambiente de lápis e papel para a aprendizagem desta teoria apresenta barreiras intransponíveis, tanto para o ensino como para a aprendizagem. É tanto que encontramos com facilidade investigações apoiadas em suporte tecnológico. O ambiente fornecido pelo computador, no entanto, pode fornecer e provocar aprendizagens indesejáveis e, facilmente, conduzir o aluno ao erro.

Um “conceito matemático não é um objeto monolítico. Um simples conceito pode ser compreendido a partir de vários pontos de vista e pode apresentar diversas representações, adaptando-se ao local onde o conceito é utilizado”. (DOUADY, 1984, p. 84). Deste modo, o cuidado com a visualização e a percepção dos objetos, propriedades intuitivas não pode se restringir apenas ao ambiente computacional, mas também quando usamos as tecnologias do lápis e papel, embora na aprendizagem do CDI “os microcomputadores podem fornecer desenhos móveis que proporcionam um poderoso suporte cognitivo para estas imagens mentais.” (TALL, 1997, p. 5).

Certamente, perante tais argumentos das décadas de 1980 e 1990, vislumbramos a larga contribuição que o uso de tecnologias trouxe para o ensino de Matemática. Estas posições se mantêm e esta categoria do discurso ainda se preserva de modo atual. Percebemos isto quando analisamos os estudos de Borba e Villarreal (2005).

Borba e Villarreal (2005, p. 51) lembram que, “de 1980 até 1990, observamos uma tendência dos matemáticos educadores com o trabalho envolvendo múltiplas representações.”. Além disso, as múltiplas representações de um software têm sido desenvolvidas para calculadoras e computadores com tanta rapidez que se torna difícil lidar com estas. Mais adiante, os autores destacam que, desde o fim dos anos 1990, as pesquisas sobre esta temática decresceram consideravelmente, persistindo nos experimentos que envolviam Geometria.

Borba e Villarreal (2005, p. 77-78) apontam alguns fatores que contribuíram para o abandono, por parte dos pesquisadores, deste tipo de abordagem. Por outra parte, eles relatam que a evolução das calculadoras e computadores mudou a natureza das relações estabelecidas entre o homem e a mídia. Como consequência, percebemos o retorno das investigações que tomam como objeto de estudo as múltiplas representações, embora a terminologia específica não seja mais adotada.

Em todo o caso, vemos a ocorrência, no passado como em tempos mais atuais, de mudanças, evolução e adaptação das relações entre homem e máquina, refletindo até nas

---

abordagens e pontos de vista assumidos em pesquisas empíricas que analisam tal relação. Vemos que as próprias terminologias são descartadas e/ou modificadas para o desenvolvimento mais preciso da interpretação dos fenômenos e dos dados.

Apesar dos grandes avanços nas pesquisas relacionadas à Informática na Educação, o sistema educacional Brasileiro ainda não consegue absorver as tecnologias desenvolvidas. Além disso, o método de ensino utilizado no CDI na maioria das universidades ainda está baseado na exposição do conteúdo no quadro-negro. Com o intuito de modificar este cenário, esta pesquisa especificará um sistema que auxiliará o professor a introduzir técnicas de ensino colaborativo de CDI em uma sala de aula virtual.

## O USO DO COMPUTADOR E A WEB SEMÂNTICA

Devido a grande quantidade de variáveis e a dificuldade de se entender e utilizar as teorias de aprendizagem de forma prática é necessário elaborar um sistema que possa “raciocinar” em cima dos dados do ambiente (variáveis) para escolher de forma “inteligente” a melhor teoria de aprendizagem. Além disso, é essencial que o sistema apresente de forma simples como utilizar as informações contidas nestas teorias para que seja possível utilizá-las em cenários reais de ensino.

Uma das possíveis soluções para criar tal sistema inteligente é a construção de uma plataforma (*framework*) baseada em ontologias. Através de ontologias, um programa de computador pode interpretar de forma semântica os conceitos encontrados nas teorias de aprendizagem.

De fato, o uso de engenharia de ontologias para construções de conhecimento de forma sistemática tem mostrado resultados positivos (Devedzic, 2006). As ontologias têm sido utilizadas com sucesso para resolver diversos problemas relacionados à formação de grupos e ao planejamento de atividades colaborativas.

Barros *et al.* (2002) mostram que o uso de ontologias traz diversos benefícios para planejar atividades colaborativas com o intuito de resolver problemas de Geometria. Finalmente, um estudo realizado por Isotani & Mizoguchi (2008) identificou que o uso de ontologias e teorias de aprendizagem para formação de grupos e planejamento de atividades colaborativas influencia positivamente na aprendizagem do aluno.

Apesar dos grandes avanços na área da aprendizagem colaborativa assistida pelo computador e engenharia de ontologias nos últimos anos, não é de conhecimento dos autores a existência de plataformas inteligentes que utilizem tais tecnologias para auxiliar o professor a desenvolver atividades colaborativas.

Contudo este cenário é o mais comum na realidade das universidades de todo o Brasil. Normalmente, o professor dispõe de um computador, mas em classe utiliza apenas o giz e o quadro-negro. Nestas condições, necessitamos de uma plataforma de ensino que utilize a *web* para auxiliar o professor a desenvolver suas aulas.

Através do uso de uma plataforma inteligente que faz uso das teorias de aprendizagem para criar atividades pedagógicas significativas e facilitar a introdução do ensino colaborativo em sala de aula, podemos melhorar sensivelmente a qualidade do ensino de CDI nas universidades brasileiras.

---

O sistema será desenvolvido utilizando ontologias e tecnologias da Web Semântica. As ontologias serão desenvolvidas utilizando diversos conceitos provindos de diferentes teorias de aprendizagem. Através da representação formal e explícita que as ontologias oferecem e, utilizando ferramentas de inferência que a Web Semântica proporciona, será possível criar um sistema inteligente que auxilia o professor durante a formação de grupos e o planejamento de atividades colaborativas para uso em salas de aula virtuais.

Através do experimento que realizaremos, em conjunto com o professor de Matemática, verificaremos se o sistema auxiliou o professor a introduzir de forma adequada o ensino colaborativo de CDI.

Portanto, temos como objetivo especificar formalmente e desenvolver um protótipo de uma plataforma suportada por mecanismos computacionais inteligentes, destinada a ambientes virtuais de aprendizagem das disciplinas de CDI em ambientes de web semântica, integrando a visão de ontologias às metodologias baseadas em registro de representação semiótica.

Para esta metodologia utilizaremos as seguintes ações que nortearão esta pesquisa:

- Estudo bibliográfico dos temas-chave da pesquisa: ensino de CDI, EaD, AVA, registro de representação semiótica, ontologias, web semântica.
- Levantamento de metodologias existentes para CDI.
- Análise da interoperabilidade entre domínios representados por ontologias e o universo das metodologias existentes.
- Modelagem de nova uma metodologia que atenda requisitos da web semântica.
- Especificação formal de uma plataforma destinada a ambientes virtuais de aprendizagem em ambientes de web semântica que suporte a nova metodologia acima.
- Desenvolvimento de um protótipo suportado por mecanismos computacionais inteligentes, integrando a visão de ontologias às metodologias existentes.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia que utilizaremos nesta pesquisa é fundamentada nos princípios da Engenharia Didática. Nessa teoria Michele Artigue idealiza o trabalho do pesquisador análogo ao de um engenheiro, subdividindo os elementos em sala de aula, com uso de sequências didáticas (MACHADO, 2008, p. 233-247). Utilizamos esta metodologia para construirmos as ferramentas de ensino e aprendizagem. Segundo esta pesquisadora, a engenharia didática se caracteriza por ser um experimento baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, ou seja, a construção, efetivação, observação e análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1988).

Esta abordagem metodológica se originou na preocupação com uma ideologia de inovação presente na educação, que permite realizar experimentações em sala de aula, independentemente de fundamentações teóricas. Ela se relaciona também com a valorização do saber prático do educador, concordando que teorias desenvolvidas ausentes da sala de aula são insuficientes para abranger a complexidade que são os processos de ensino e de aprendizagem. Nessa perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de atuarmos fundamentados em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da realização didática como prática de investigação.

---

O educador que desenvolve suas atividades utilizando essa metodologia consegue dar significado ao que ensina na medida em que trabalha a partir dos obstáculos expostos pelos alunos. Estes obstáculos, quando trabalhados corretamente, conduzem ao desenvolvimento de uma autonomia intelectual.

Enquanto metodologia de pesquisa, o uso da engenharia didática transcorre por quatro fases: análise preliminar, análise a priori, experimentação e análise a posteriori. Na análise preliminar são feitas considerações a respeito do quadro teórico geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão. É feita uma análise dos conteúdos considerados pelo ensino, fazendo-se uma análise de como está se desenvolvendo atualmente o ensino do objeto em estudo. É feita uma análise da concepção dos alunos de suas dificuldades apresentadas diante do assunto abordado, observando-se os entraves que impossibilitam os processos de ensino e de aprendizagem.

Dizemos que a análise preliminar é a análise dos conteúdos que se almeja abordar no desenvolvimento dos materiais junto ao aluno. São importantes nesse contexto, os estudos sobre os processos educacionais desenvolvidos em classe, como os meios, os instrumentos e a mediação do professor, pretendendo dar elementos à construção da análise a priori.

A análise a priori consiste na elaboração de sequências didáticas e do experimento para a ação em classe, em que serão estabelecidas variáveis de controle que possibilitem avaliar o processo de elaboração de material e atividades. Nesta fase, concebemos e estruturamos as atividades e os momentos didáticos que foram desenvolvidos com os alunos.

Esta fase consiste numa análise feita sobre o assunto em estudo. Estão presentes nesta fase duas etapas: em primeiro detalhamos o objeto e em segundo a previsão de melhorias para o ensino e aprendizagem. É neste momento em que serão estabelecidas hipóteses que serão investigadas pela proposta didática a ser elaborada. As hipóteses elaboradas se estabelecem como elemento fundamental, pois serão elas que iremos confrontar com os resultados da sequência didática para verificarmos se elas são válidas ou não.

Na terceira fase aplicaremos a sequência didática, em que colocamos em prática o conhecimento teórico e didático do professor. A sequência didática sugerida deverá ser desenvolvida com uma metodologia de ensino que tenha uma perspectiva de construção de um saber reflexivo e indagador.

A experimentação é a execução das metodologias desenvolvidas nas análises anteriores, ou seja, é a realização de cursos em que recorremos à pesquisa-ação de forma experimental em educação. Observamos o envolvimento dos estudantes, registrando as atividades desenvolvidas no decorrer do curso. Nesse caso, o material produzido anteriormente é analisado por uma sequência didática e logo após se deve fazer a análise a posteriori.

Artigue (1988) diz que, na fase experimental, é necessário deixar claro os objetivos e as condições de realização da pesquisa e estabelecermos um contrato didático para aplicarmos os instrumentos de pesquisa e os registros das observações feitas durante a experimentação.

A análise a posteriori é a fase de interpretação dos resultados da experimentação e seu objetivo é dar um *feedback* para a construção de uma nova análise a priori para uma nova experimentação, idealizando o desenvolvimento de atividades como uma atualização dos processos em questão. Esta fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação que constam nas observações feitas durante cada sessão de ensino bem como

---

das produções dos alunos feitas em classe ou fora dela. Nela é verificado se o aprendizado foi consolidado, determinando assim a validação, ou não, da sequência didática utilizada.

Na engenharia didática, a fase de validação da sequência didática é feita durante todo o processo de desenvolvimento da proposta em meio a uma constante confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e na análise a posteriori, onde é verificado se as hipóteses feitas no inicio da pesquisa foram confirmadas.

Diante do conhecimento das fases que delineiam a engenharia didática é possível perceber o novo horizonte que esta abordagem metodológica veio dar às práticas educativas desenvolvidas em sala de aula, tendo em vista a possibilidade de se considerar a própria prática de ensino como objeto de investigação, sujeitando-a a mudanças na medida em que se observam os resultados alcançados. Portanto, a Engenharia Didática constitui-se um referencial metodológico importante e viável para os processos de ensino e de aprendizagem já que permite a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

Para os procedimentos metodológicos que serão adotados para a coleta dos dados, serão considerados vários momentos. Será necessário o desenvolvimento de experimentos para a exploração da plataforma inteligente no ambiente de web semântica. Os dados serão coletados em momentos diferentes que envolverão:

I. Realização de um questionário estruturado de diagnóstico. Este questionário consistirá em uma sequência de questões estruturadas, formuladas com o objetivo de identificar o grau de conhecimento dos estudantes.

II. Curso de capacitação, utilizando um guia rápido de referência da plataforma mencionada anteriormente.

III. Aplicação de um módulo, contendo os exercícios que formaram a metodologia proposta neste trabalho, em que o grupo de estudantes se submeterá a um trabalho cujo objetivo principal é identificar, de modo empírico, a manifestação de determinadas “categorias” do raciocínio intuitivo no contexto da resolução de problemas do CDI.

IV. Aplicação de um novo questionário de diagnóstico. Este questionário será elaborado com questões que possibilitem aos estudantes relatar suas impressões sobre o modelo de trabalho desenvolvido bem como dar sugestões para novos trabalhos.

A implementação do modelo proposto será documentada através das atividades realizadas durante a terceira etapa. Esta documentação permitirá a utilização de quadros e tabelas comparativos entre os resultados obtidos, gerando assim informações que permitirão verificar se o modelo proposto conseguiu alcançar seus objetivos.

A partir destas situações, será possível coletar os dados necessários, no entanto, cada um destes momentos envolverá procedimentos metodológicos diferentes no preparo do curso e dos experimentos.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A vasta literatura concernente ao ensino de CDI sugere que a incorporação de recursos tecnológicos (como o *software* Protégé, entre outros) na abordagem de conceitos de Cálculo permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada. Podemos observar, que ao longo dos anos, não houve mudanças substanciais na forma como grande parte dos conceitos

---

de Cálculo são abordados. A abordagem de tais conceitos, ainda pauta-se em tecnicidades, formalismo e rigor, aspectos estes que distanciam e muito da forma como estes conceitos foram construídos e formalizados. É nesse sentido que entendemos a necessidade do resgate do CDI por meio de recursos tecnológicos.

Embora exista um reconhecimento sobre as potencialidades e possibilidades advindas da utilização de recursos das tecnologias digitais na abordagem de conceitos de CDI, sabemos que essa característica por si só não é suficiente para que sejam integradas a estas aulas as tecnologias.

Nesse sentido, uma aula de Cálculo que leve em conta a utilização de tais recursos não se constitui em uma tarefa simples, nem tampouco em uma mudança instantânea, ou seja, não se espera que o professor mude sua prática imediatamente, mas que seja a ele dada a oportunidade de momentos de formação, que possibilitem repensar sua prática vinculada ao uso das tecnologias digitais.

É possível ao professor de Cálculo transcender as didáticas tradicionais de ensino e utilizar uma abordagem metodológica da investigação matemática, por meio de atividades exploratórias e investigativas e das potencialidades didático-pedagógicas advindas de ambientes computacionais como as ontologias.

Uma importante funcionalidade das ontologias vem do fato delas possibilitarem a utilização de mecanismos de inferência para criar um novo conhecimento a partir do conhecimento existente. As ontologias também têm servido, em algumas áreas, como uma maneira de unificar certos conhecimentos e conceitos, servindo assim como um elemento estruturador.

As pesquisas em Web Semântica têm oferecido novas perspectivas para a educação na Web. Por um lado, a Web Semântica oferece padrões e estruturas formais para representar e anotar o conteúdo educacional de forma semântica, permitindo que um computador ou agentes de *software* possam “compreender” e utilizar adequadamente a informação na Web. Dessa forma, viabiliza-se a criação de sistemas educacionais mais inteligentes e com maior interoperabilidade.

Dessa forma, o principal objetivo deste artigo foi apresentar os desafios a serem resolvidos na área de Web Semântica com foco no ensino de CDI, assim, motivar e promover mais pesquisas nesta área em crescente expansão. A Informática na Educação está em crescente expansão e possui o potencial para resolver os diversos problemas apresentados propondo soluções que possivelmente terão impacto muito positivo na qualidade do ensino.

## REFERÊNCIAS

- ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL. D. *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica: *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble, *La Pensée Sauvage Editions*, 1988.
- ARTIGUE, M. *Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?*, *Boletín de La Asociación Venezolana*, v. 10, nº 2, 2003, p. 117-134.

---

ÁVILA, G. S. **Várias faces da matemática**. São Paulo: Blucher, 2007.

BARROS, B., VERDEJO, M. F., READ, T. & MIZOGUCHI, R. *Applications of a Collaborative Learning Ontology*. In *Proceedings of the Mexican International Conference on Artificial Intelligence*, LNCS 2313, 2002, p. 103-118.

BORBA, M.; VILLAREAL, M. *Human with-media and the reorganization of Mathematical Thinking: Modeling, Visualization and Experimentation*, New York: Springer, 2005.

DEVEDZIC, V. *Semantic Web and Education*. Springer, 2006.

DOUADY, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement de mathématiques (thèse d'état)*. Paris: Paris VII, 1984, p. 245.

ISOTANI, S., MIZOGUCHI, R. I. In: *Proceedings of the International Conference on Intelligent Tutoring Systems*, LNCS 5091, 2008, p. 646-655.

MACHADO, S. **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo, EDUC, 2008.

TALL, D. *From School to University: the effects of learning styles in the transition from elementary to advanced mathematical thinking*. In: THOMAS, M. O. (Ed.) *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference*, University of Auckland, 1997, p. 9-26.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. *Mathematics Education Library*, v. 11, London: Kluwer Academic Publishers, 2002.